силу системы (12) удовлетворяются тождественно.

Получено каноническое представление поверхности (A_4), ассоциированной с конгруэнциями K:

$$z = \frac{2}{3}\lambda(y^3 - x^3) + \frac{1}{2\alpha}(x^2 + y^2) + [4].$$

Найден трехпараметрический пучок соприкасающихся квадрик к поверхности (A_4):

$$2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 + a_{34}\left(2x^3x^4 - \frac{1}{\alpha}(x^1)^2 - \frac{1}{\alpha}(x^2)^2\right) + a_{33}(x^3)^2 = 0,$$

из которого выделен пучок квадрик Дарбу:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2\alpha t x^1x^3 + 2\alpha t x^2x^3 - 2\alpha x^3x^4 + b_{33}(x^3)^2 = 0,$$

а также квадрика Ли поверхности (A_4):

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2\alpha t x^1x^3 + 2\alpha t x^2x^3 - 2\alpha x^3x^4 + (\alpha^2t^2 - 1)(x^3)^2 = 0.$$

Доказано, что линия Γ_c является линией Дарбу поверхности (A_4).

Найдены директриса Вильчинского, ось Чеха и ребро Грина поверхности (A_4). Эти три замечательные прямые совпадают друг с другом и определяются точками A_4 и $\alpha t A_1 - \alpha t A_2 + 2A_3$. Таким образом, канонический пучок поверхности (A_4) вырождается в прямую.

Список литературы

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.41-49.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Е.П. Сопина

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЭЛЛИПСОИДОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 исследуются конгруэнции V_2^3 эллипсоидов с одной вырождающейся в линию фокальной поверхностью.

Отнесем конгруэнцию квадрик Q к реперу $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$, $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$, где A - центр эллипсоида Q, вектор $\bar{e}_3$ направлен в фокальную точку M_3 эллипсоида Q, векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ лежат в плоскости, сопряженной направлению вектора $\bar{e}_3$ относительно Q, причем вектор $\bar{e}_1$ сопряжен вектору $\bar{e}_2$ и направлен по прямой AM, где M - характеристическая точка плоскости. Концы векторов $\bar{e}_\alpha$ расположены на эллипсоиде Q. Из рассмотрения исключается случай, когда касательная плоскость к поверхности (A) совпадает с плоскостью $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Уравнение квадрики Q относительно данного репера принимает вид:

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0. \quad (1)$$

Конгруэнция V_2^3 определяется системой уравнений Пфаффа:

$$\omega_i^i = \Gamma_i^{ik}\omega_k, \quad \omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k \ (i \neq j), \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \quad (2)$$
$$\omega^i = \Gamma^{ik}\omega_k, \quad \omega_3^3 + \omega_3^3 = 0, \quad \omega^3 + \rho\omega_1 = 0,$$

формы

$$\omega_i^3 = \omega_i \quad (i, j = 1, 2) \quad (3)$$

здесь приняты в качестве базисных линейно независимых форм.

Назовем конгруэнцией V_2^{31} такую конгруэнцию V_2^3, у которой поверхность (M_3) вырождается в линию.

6 Зак. 1401

Конгруэнция V_2^{31} выделяется из конгруэнции V_2^3 конечными соотношениями:

$$\Gamma^{i1} + \Gamma_3^{i1} = \lambda\,(\Gamma^{i2} + \Gamma_3^{i2}). \qquad (4)$$

Учитывая равенства (4) в системе (2), получаем систему уравнений Пфаффа для конгруэнции V_2^{31} в виде

$$\begin{aligned} &\omega_i^i = \Gamma_i^{ik}\omega_k, \quad \omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k \ (i \neq j), \quad \omega^3 + \omega_3^3 = 0, \quad \omega^i = \Gamma^{ik}\omega_k, \\ &\omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \quad \omega^3 = \rho\,\omega_1 = 0, \quad \omega_3^1 + \omega^1 = \lambda\,(\omega^2 + \omega_3^2). \end{aligned} \qquad (5)$$

Замыкая $\omega^3 + \omega_3^3 = 0$, находим

$$\Gamma^{12} + \Gamma_3^{12} = \Gamma^{21} + \Gamma_3^{21}. \qquad (6)$$

Анализируя систему (5), убеждаемся, что конгруэнции V_2^{31} существуют и определяются с произволом шести функций двух аргументов.

Обозначим через M_α конец вектора $\bar{e}_\alpha$, M_α^* – конец вектора $-\bar{e}_\alpha$, ℓ_α – прямую, проходящую через центр эллипсоида Q и конец вектора $\bar{e}_\alpha$.

Т е о р е м а. Конгруэнции V_2^{31} обладают следующими свойствами: 1/ касательная к линии (M_3) параллельна плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$; 2/ точки M_3 и M_3^* не могут одновременно являться фокальными точками эллипсоида Q; 3/ если касательная плоскость к поверхности (A) параллельна координатной плоскости $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, то точка A является фокальной точкой прямолинейной конгруэнции (ℓ_3); 4/ если точка M_i является фокальной точкой эллипсоида Q, то касательная плоскость к поверхности (M_i) параллельна плоскости $(A, \bar{e}_j, \bar{e}_3)$; 5/ если точки M_i и M_i^* являются фокальными точками эллипсоида Q, то центры всех эллипсоидов конгруэнции располагаются на одной прямой (линии центров).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ В силу (5) имеем: $dM_3 = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$. 2/ Если точка M_3^* является фокальной точкой эллипсоида Q, то получаем, что точка A является характеристической точкой плоскости, а этот случай исключается из рассмотрения. 3/ Уравнение для определения фокусов прямолинейной конгруэнции (ℓ_3) запишется в виде:

$$\begin{aligned} &\mu^2(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{21}\Gamma_3^{12}) + \mu\,(\Gamma_3^{11}\Gamma^{22} + \Gamma^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{21}\Gamma^{12} - \\ &- \Gamma^{21}\Gamma_3^{12}) + \Gamma^{11}\Gamma^{22} - \Gamma^{21}\Gamma^{12} = 0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Из условия коллинеарности касательной плоскости к поверхности (A) и плоскости $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ имеем:

$$\Gamma^{21} = \Gamma^{12} = 0. \qquad (8)$$

Учитывая (8) в (7), получаем $\mu = 0$, т.е. A – фокальная точка прямолинейной конгруэнции (ℓ_3). 4/ Запишем уравнения для определения фокальных точек и фокальных семейств конгруэнции V_2^{31}:

$$\begin{aligned} &(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \\ &(\Gamma_1^{11} - \rho)(x^1)^2 + (\Gamma_2^{21} - \rho)(x^2)^2 + (\Gamma_2^{11} - \Gamma_1^{21})x^1x^2 + (1 + \Gamma_3^{11})x^1x^3 + \\ &+ (1 + \Gamma_3^{21})x^2x^3 + x^1\Gamma^{11} + x^2\Gamma^{21} - \rho x^3 + \rho = 0, \\ &\Gamma_1^{12}(x^1)^2 + \Gamma_2^{22}(x^2)^2 + (\Gamma_2^{12} - \Gamma_1^{22})x^1x^2 + \Gamma_3^{12}x^1x^3 + (\Gamma_3^{22} + 1)x^2x^3 + \\ &+ \Gamma^{12}x^1 + x^2\Gamma^{22} = 0. \end{aligned} \qquad (9)$$

Пусть M_i – фокальная точка эллипсоида Q, то из уравнений (9) получим

$$\Gamma_i^{i1} + \Gamma^{i1} = 0, \quad \Gamma_i^{i2} + \Gamma^{i2} = 0. \qquad (10)$$

Из равенств (10) следует, что касательные плоскости к поверхности (M_i) определяются соответственно точками $M_i, \bar{E}_{i1}, \bar{E}_{i2}$, где

$$\begin{aligned} &\bar{E}_{11} = (\Gamma^{21} + \Gamma_1^{21})\bar{e}_2 + (1 - \rho)\bar{e}_3, \quad \bar{E}_{12} = (\Gamma^{22} + \Gamma_1^{22})\bar{e}_2, \\ &\bar{E}_{21} = (\Gamma^{11} + \Gamma_2^{11})\bar{e}_1 - \rho\,\bar{e}_3, \quad \bar{E}_{22} = (\Gamma^{12} + \Gamma_2^{12})\bar{e}_1 + \bar{e}_3. \end{aligned}$$

5/ Пусть точки M_i и M_i^* являются одновременно фокальными точками эллипсоида Q, тогда из уравнений (9) получим:

$$\omega^i = 0, \quad \omega_i^i = 0, \quad \omega_3^i = 0. \qquad (11)$$

Имеем $d\bar{A} = \omega^3\bar{e}_3$, $d\bar{e}_3 = \omega_3^3\bar{e}_3$. Следовательно, центры всех эллипсоидов располагаются на одной прямой.

Список литературы

1. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве. – Тр. геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с. 113–136.